מספר סטודנט: _____

קראו את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה:

- משך הבוחן: שעתיים.
- בבוחן 8 שאלות: 3 שאלות "פתוחות" ו־ 5 שאלות "רב ברירה".
- יש לתת פתרון **מנומק** לכל שאלה "פתוחה".
- בכל אחת משאלות 4-8 יש תשובה נכונה **אחת** (מתוך 6 אפשרויות).
- **את התשובות הנכונות לשאלות 4-8 יש לסמן בטבלה בעמוד זה.**
  בשאלות אלו אם **רק** התשובה הנכונה מסומנת בטבלה למטה תזכו ב־ 5 נקודות.
  בשאלות אלו הבדיקה לא תתיחס לנימוקים וחישובים ואין ניקוד חלקי.
- בבוחן זה יש 11 דפים, כולל דף הזיהוי (הקודם) ודף ההנחיות הזה.
  וודא שכל הדפים מופיעים בטופס שלך.
  הדפים, מלבד דף הזיהוי ממוספרים בפינה השמאלית העליונה.
- השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.
- בסוף הבחינה יש להחזיר את **כל השאלון**.
  אין להוסיף או לתלוש עמודים מטופס הבחינה.
- מותר לכתוב משני צידי הדף.
- נא לכתוב את מספר הזהות בראש **כל עמוד**, במקום המיועד לכך.

טבלת תשובות לשאלות 4-8:

	א	ב	ג	ד	ה	ו
שאלה 4						
שאלה 5						
שאלה 6						
שאלה 7						
שאלה 8						

לשימוש הבודקים:

שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלות 4-8	סה"כ

<u>שאלה 1:</u> (30%) בהנתן פרמטר **ממשי** a נגדיר את המטריצה A ואת הוקטור $\vec{b}$ על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & -1 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2+a+1 \end{pmatrix}.$$

א. (6%) לאילו ערכים של הפרמטר a למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **אין פתרון**?

ב. (8%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **פתרון יחיד**?
מצא את הפתרון היחיד למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

ג. (8%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **אינסוף פתרונות**?
מצא את הפתרון הכללי למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

ד. (4%) לאילו ערכים של הפרמטר a יהיה מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, $A\vec{x} = \vec{0}$, שווה ל־ 1?

ה. (4%) לאילו ערכים של הפרמטר a יהיה מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, $A\vec{x} = \vec{0}$, שווה ל־ 2?

רשום את התשובות הסופיות בטבלה למטה.
את הנימוקים יש לכתוב בצד השני של הדף ובדפים הבאים.

א. **אין פתרון** למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ עבור: $a = 1$	
ב. למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **פתרון יחיד** עבור: $a \notin \{\pm 1\}$	ב. הפתרון **היחיד** במקרים אלו: $\left(0,\ \frac{a}{a-1},\ \frac{1}{a-1}\right)$
ג. למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **אינסוף פתרונות** עבור: $a = -1$	ג. הפתרון **הכללי** במקרים אלו: $(\ y-z-1,\ y,\ z\ ),\quad y,z \in \mathbb{R}$
ד. מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית** שווה 1 עבור: אין אף ערך של a.	ה. מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית** שווה 2 עבור: $a \in \{\pm 1\}$

<u>פתרון שאלה 1:</u>

נתחיל מיד בניתוח המערכת הפרמטרית על ידי דירוג (חלקי) של המטריצה המורחבת של המערכת הנתונה.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & a \\ a & 1 & -1 & 1 \\ a & a^2 & -1 & a^2+a+1 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - aR_1 \\ R_3 \to R_3 - aR_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & a \\ 0 & 1-a^2 & a^2-1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right)$$

<u>הערה:</u> הפעולות שעשינו מותרות לכל ערך של a (לא הכפלנו שורה מסוימת בביטוי שיכול להיות אפס, ולא חילקנו בביטוי שיכול להיות אפס. אך אולי חיברנו אפס פעמים שורה לשורה **אחרת**, וזה מותר.)

<u>הערה על טעות אפשרית:</u> הפעולה $R_2 \to \left(\frac{1}{1-a^2}\right) R_2$ חוקית **רק אם נניח** $1-a^2 \neq 0$. ביצוע פעולה זו **ללא טיפול נפרד** במקרים המיוחדים $a = \pm 1$ **אינה חוקית**. הטעות עלולה לגרום לכך שלא נמצא את דרגת המטריצה הנכונה במקרים $a = \pm 1$.

<u>הערה על טעות אפשרית:</u> הפעולה $R_3 \to \left(\frac{1}{a+1}\right) R_3$ חוקית **רק אם נניח** $a+1 \neq 0$. ביצוע פעולה זו **ללא טיפול נפרד** במקרה המיוחד $a = -1$ **אינה חוקית**. הטעות עלולה לגרום לכך שלא נמצא את דרגת המטריצה הנכונה במקרה בו $a = -1$.

המשך פתרון שאלה 1:

ננתח את הצורה שקיבלנו

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & a \\ 0 & 1-a^2 & a^2-1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right)$$

לפי מקרים, בהתאם לערכים של a שיאפסו את האיברים שנראים כמובילים (בצורה הפרמטרית):

- במידה ו־ $1-a^2 \neq 0$ הצורה מדורגת, ומתקיים $\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A) = 3 = n$ (n הוא מספר המשתנים) ולכן יש למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ פתרון יחיד.
- במקרה $a = 1$ השורה השלישית היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ כלומר יש סתירה במערכת $A\vec{x} = \vec{b}$, ואין למערכת הזאת פתרון.

  במקרה זה, במערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ מתקיים $\text{rank}(A|b) = 2 > 1 = \text{rank}(A)$.

  אבל, כמובן, אין סתירה במערכת **ההומוגנית** במקרה $a = 1$. במקרה זה מספר דרגות החופש הוא $f = n - \text{rank}(A) = 3 - 1 = 2$.
- במקרה $a = -1$ השורה השניה והשורה השלישית מתאפסות, והצורה המדורגת היא:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ומתקיים $\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A) = 1 < n$ (n הוא מספר המשתנים) ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות, ומספר דרגות החופש הוא $f = n - \text{rank}(A) = 3 - 1 = 2$.

א. (6%) לאילו ערכים של הפרמטר a למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **אין פתרון**?

תשובה: רק ל־ $a = 1$ עבורו מתקבלת סתירה במערכת. (זה המקרה היחידי בו $\text{rank}(A|b) > \text{rank}(A)$.)

המשך פתרון שאלה 1:

ב. (8%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ **פתרון יחיד**?
מצא את הפתרון היחיד למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

תשובה: לכל $a \notin \{-1,1\}$ יש למערכת פתרון יחיד.

במקרים אלה, ניתן לבצע את הפעולות $R_2 \to \left(\frac{1}{1-a^2}\right) R_2$, $R_3 \to \left(\frac{1}{a+1}\right) R_3$ ולקבל את המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

מכאן נקבל שהפתרון היחיד למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ הוא $\left(0,\ \dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{1}{a-1}\right)$.

ג. (8%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ **אינסוף פתרונות**?
מצא את הפתרון הכללי למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

תשובה: רק ל־ $a=-1$ שבו אין סתירה במערכת ומספר דרגות החופש גדול ממש מ־ 0.
(במקרה שלנו מספר דרגות החופש הוא 2.)

כפי שכבר ראינו, במקרה זה המטריצה המורחבת המדורגת היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ונשאר רק משוואה $x-y+z=-1$, כלומר $x=y-z-1$. לכן הפתרון הכללי של המערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ הוא $(\ y-z-1,\ y,\ z\ ),\quad y,z\in\mathbb{R}$.

המשך פתרון שאלה 1:

ד. (4%) לאילו ערכים של הפרמטר a יהיה מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, $A\vec{x}=\vec{0}$, שווה ל־ 1?

תשובה: מימד מרחב בפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, שווה למספר דרגות החופש, כלומר ל־ $f=n-\text{rank}(A)$.

ראינו שאין אף ערך של a עבורו $\text{rank}(A)=2$ (ואז $f=1$) במטריצה A הנתונה.

ה. (4%) לאילו ערכים של הפרמטר a יהיה מימד מרחב הפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, $A\vec{x}=\vec{0}$, שווה ל־ 2?

תשובה: מימד מרחב בפתרונות של המערכת **ההומוגנית**, שווה למספר דרגות החופש, כלומר ל־ $f=n-\text{rank}(A)$.

ראינו שרק עבור $a\in\{\pm1\}$ מתקיים ש־ $\text{rank}(A)=1$ ו־ $f=2$ במערכת **ההומוגנית**.
(לכל ערך אחר של a הדרגה של A היא 3, ומספר דרגות החופש הוא 0.)

<u>שאלה 2:</u> (30%)

יהא $V = \mathbb{R}_3[x]$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־ 3 (מעל $\mathbb{R}$).

יהיו

$$\begin{aligned} U &= \left\{ p(x) \in V \ : \ p''(-1) = 0 \right\}, \\ W &= \operatorname{Span}\left(\left\{ x^3 + x^2 + x + 1,\ 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \right\} \right) \end{aligned}$$

תת־מרחבים של V.

א. (10%) מצא בסיס של U. מהו המימד של U?

<u>תשובה:</u> נתבונן בפולינום כללי ממעלה 3 על מנת לברר אילו פולינומים שייכים ל־ U.

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ p''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

נציב $x = -1$ ונקבל מהתנאי שמגדיר את U כי

$$0 = p''(-1) = -6a + 2b$$

ומכאן ש־ $b = 3a$, ו־ c, d חופשיים.

האיבר הכללי של U הוא

$$p(x) = ax^3 + 3ax^2 + cx + d = a(x^3 + 3x^2) + cx + d$$

ולכן הקבוצה $B_U = \left\{ x^3 + 3x^2,\ \ x,\ \ 1 \right\}$ היא קבוצה פורשת של U.

B_U היא קבוצה בלתי תלויה לינארית מכיון שהיא מכילה שלושה פולינומים ממעלות שונות.

אזי, הקבוצה B_U היא בסיס של U. מכיון שיש ב־ B_U 3 איברים, $\dim(U) = 3$.

ב. (5%) מצא בסיס של W. מהו המימד של W?

<u>תשובה:</u> שני הפולינומים הנתונים בהגדרת W (כמרחב נפרש) אינם פרופורציונלים, ולכן הקבוצה

$$\left\{ x^3 + x^2 + x + 1,\ 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \right\}$$

היא בסיס של W. מכאן, $\dim(W) = 2$.

<u>הערה:</u> מדירוג אפשר לקבל בסיס פשוט יותר: $B_W = \left\{ x^3 + x^2,\ x + 1 \right\}$

המשך פתרון שאלה 2:

ג. (10%) מצא בסיס של החיתוך $U \cap W$. חשב את $\dim(U \cap W)$.

תשובה: על מנת למצוא איבר כללי בחיתוך נפעיל את התנאי של U על איבר הכללי של W. נשתמש בבסיס הפשוט B_W.
(פתרון בעזרת הבסיס שנתון בהגדרת W דומה, אך החישוב ארוך יותר.)

האיבר הכללי של W לפי הבסיס הפשוט B_W הוא $p(x) = \alpha(x^3 + x^2) + \beta(x + 1)$.

כזכור התנאי המקורי בהגדרת U היה $p''(-1) = 0$. ראינו שתנאי זה דורש שהמקדם של x^2 יהיה 3 כפול המקדם של x^3, ואין שום הגבלה של המקדמים האחרים. התנאי $\alpha = 3\alpha$ מחייב $\alpha = 0$.

לכן $U \cap W = \text{Span}\left(\left\{ x + 1 \right\}\right)$. הבסיס שקיבלנו הוא $B = \left\{ x + 1 \right\}$ (קבוצה המכילה וקטור אחד בלבד ששונה מוקטור האפס היא בת"ל) ו־ $\dim(U \cap W) = 1$.

ד. (5%) האם $U + W$ הוא סכום ישר? נמק בקצרה.

תשובה: לפי משפט שנלמד בהרצאות, הסכום $U + W$ הוא סכום ישר אם ורק אם החיתוך $U \cap W = \{\vec{0}\}$ (תת־מרחב היחיד ממימד 0). במקרה שלנו $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$ (המימד הוא 1), ולכן הסכום **אינו** סכום ישר.

<u>שאלה 3:</u> (15%) יהא V מרחב וקטורי, ויהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ כך שמתקיים:

- הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בלתי תלויה לינארית.
- הקבוצה $\{v_3, v_4\}$ בלתי תלויה לינארית.
- $v_4 \in \mathrm{Span}\Big(\{v_1, v_3\}\Big)$.

א. (10%) הוכח שהקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. (5%) הוכח ש־ $v_1 \in \mathrm{Span}\Big(\{v_2, v_3, v_4\}\Big)$.

<u>פתרון שאלה 3</u>:

- <u>הערות מקדימות</u>:
  - ⋆ ישנם מספר הוכחות שונות לטענות אלו.
  - ⋆ ניתן להוכיח את הטענה של סעיף א' ואז להעזר בו בהוכחה של הטענה של סעיף ב', או להיפך.
- <u>אבחנה 1</u>: לפי הנתון השלישי קיימים סקלרים α_1, α_3 כך שמתקיים:

$$(\clubsuit) \qquad v_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$$

  - ⋆ בהמשך α_1, α_3 יסמנו את הסקלרים האלה.
- מספר הוכחות משתמשות בטענת עזר הבאה.
  - ⋆ <u>טענת עזר א'</u> (ביצוג של v_4) מתקיים $\alpha_1 \neq 0$.
  - ⋆ <u>הוכחת טענת עזר א'</u>: נניח בשלילה ש־ $\alpha_1 = 0$. אזי $v_4 = \alpha_3 v_3$ בסתירה לכך שהקבוצה $\{v_3, v_4\}$ בלתי תלויה לינארית (הנתון השני). לכן, לא ייתכן ש־ $\alpha_1 = 0$. $\square$

המשך פתרון שאלה 3:

- הוכחה 1 לטענה של סעיף א'

א. יהיו $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ סקלרים עבורם מתקיים:

$$(\diamondsuit) \qquad 0 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4$$

ב. נציב במקום v_4 לפי ($\clubsuit$) ונקבל:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4(\alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3) \\ &= (\beta_4\alpha_1)v_1 + \beta_2 v_2 + (\beta_3 + \beta_4\alpha_3)v_3 \end{aligned}$$

ג. לפי נתון הראשון, הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בלתי תלויה לינארית. לכן המקדמים של v_1, v_2, v_3 כולם 0. בפרט $\beta_2 = 0$.

ד. אי לכך, המשוואה ($\diamondsuit$) נותנת

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 \\ &= 0v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 \\ &= \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 \end{aligned}$$

ה. לפי נתון השני, הקבוצה $\{v_3, v_3\}$ בלתי תלויה לינארית, ולכן בהכרח $\beta_3 = \beta_4 = 0$.

ו. מכיון שהראנו שבהכרח $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ במשוואה ($\diamondsuit$) הקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל.

$\square$

המשך פתרון שאלה 3:

- הוכחה 2 לטענה של סעיף א'

נתחיל עם צעדים א' עד ג' של הוכחה 1.

ד. כמו כן, נקבל את מערכת המשוואות הבאה במשתנים β_3, β_4:

$$(\triangle) \qquad \begin{cases} \alpha_1\beta_4 = 0 \\ \beta_3 + \alpha_3\beta_4 = 0 \end{cases}$$

ה. לפי טענת עזר 1, מתקיים $\alpha_1 \neq 0$, ולכן בהכרח $\beta_4 = 0$.

ו. לכן פתרון מערכת המשוואות $(\triangle)$ הוא $\beta_3 = \beta_4 = 0$.

ז. מכיון שהראנו שבהכרח $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ במשוואה $(\diamondsuit)$ הקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל.

$\square$

- הוכחה 3 לטענה של סעיף א'

א. לפי הנתון השני הקבוצה $\{v_3, v_4\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. על פי משפט, על מנת להוכיח ש־ $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל, מספיק להוכיח כי $v_2 \notin \mathrm{Span}\Big(\{v_3, v_4\}\Big)$.

ג. נניח בשלילה שקיימים סקלרים γ_3, γ_4 עבורם $v_2 = \gamma_3 v_3 + \gamma_4 v_4$.

ד. נציב במקום v_4 לפי $(\clubsuit)$ ונקבל:

$$\begin{aligned} v_2 &= \gamma_3 v_3 + \gamma_4 v_4 \\ &= \gamma_3 v_3 + \gamma_4(\alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3) \\ &= (\gamma_4\alpha_1)v_1 + (\gamma_3 + \gamma_4\alpha_3)v_3 \end{aligned}$$

כלומר v_2 הוא צירוף לינארי של v_1, v_3.

ה. זה בסתירה לנתון הראשון, שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל.

ו. לכן בהכרח $v_2 \notin \mathrm{Span}\Big(\{v_3, v_4\}\Big)$ ולכן הקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל.

$\square$

המשך פתרון שאלה 3:

- הוכחה 4 לטענה של סעיף א'

א. לפי הנתון הראשון והמשפט שתת־קבוצה של קבוצה בת"ל היא גם בת"ל נקבל שהקבוצה $\{v_2, v_3\}$ בת"ל.

ב. על פי משפט, על מנת להוכיח ש־ $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל, מספיק להוכיח כי $v_4 \notin \mathrm{Span}\Big(\{v_2, v_3\}\Big)$.

ג. נניח בשלילה שקיימים סקלרים γ_2, γ_3 עבורם $v_4 = \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$.

ד. נחשב $v_4 - v_4$ כאשר פעם נשתמש במשוואה הקודמת ופעם ב־ (♣) ונקבל:

$$\begin{aligned} 0 &= v_4 - v_4 = (\alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3) - (\gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3) \\ &= \alpha_1 v_1 + (-\gamma_2) v_2 + (\alpha_3 - \gamma_3) v_3 \end{aligned}$$

ה. אבל לפי טענת עזר 1 מתקיים $\alpha_1 \neq 0$.

ו. לכן קיבלנו צירוף לינארי לא טרוייאלי של v_1, v_2, v_3 שנותן 0.

ז. זו בסתירה לנתון הראשון, שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל.

ח. לכן בהכרח $v_4 \notin \mathrm{Span}\Big(\{v_2, v_3\}\Big)$, ולכן הקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ בת"ל.

□

- הוכחה 5 לטענה של סעיף א' (מסתמך על הטענה של סעיף ב')

א. נסמן $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. כמובן ש־ S פורשת את $\mathrm{Span}(S)$.

ב. לפי הנתון השלישי, S ת"ל, ולכן אינה פורשת מינימלית. לכן $\dim(\mathrm{Span}(S)) < 4$.

ג. מצד שני, $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה בת"ל ב־ $\mathrm{Span}(S)$, ולכן אפשר להרחיבה לבסיס של $\mathrm{Span}(S)$. מכאן נסיק כי $\dim(\mathrm{Span}(S)) \geq 3$.

ד. אזי $\dim(\mathrm{Span}(S)) = 3$.

נניח שהטעה של סעיף ב' כבר הוכחה (מבלי להסתמך על הטענה של סעיף א').

ה. לפי הטענה של סעיף ב' (ש"הוכחנו כבר") $v_1 \in \mathrm{Span}\Big(\{v_2, v_3, v_4\}\Big)$ ולכן גם $B = \{v_2, v_3, v_4\}$ קבוצה פורשת של $\mathrm{Span}(S)$.

ו. B קבוצה פורשת, ו־ $|B| = \dim(\mathrm{Span}(S))$. לכן B בסיס של $\mathrm{Span}(S)$, ובפרט בת"ל.

□

המשך פתרון שאלה 3:

- הוכחה 1 לטענה של סעיף ב'

א. נעביר אגפים במשוואה (♣) של אבחנה 1, על מנת לקבל:

$$\alpha_1 v_1 = v_4 - \alpha_3 v_3$$

ב. לפי טענת עזר 1 ידוע כי $\alpha_1 \neq 0$, ולכן יש לו הופכי כפלי.

ג. נכפיל את שני האגפים ב־ α_1^{-1} ונקבל:

$$\begin{aligned} v_1 &= (\alpha_1^{-1}\alpha_1)v_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_1 v_1) \\ &= \alpha_1^{-1}(v_4 - \alpha_3 v_3) \\ &= (\alpha_1^{-1})v_4 + \left(-\alpha_3\alpha_1^{-1}\right) v_3 \\ &= 0v_2 + \left(-\alpha_3\alpha_1^{-1}\right) v_3 + (\alpha_1^{-1})v_4 \end{aligned}$$

ד. הראנו ש־ $v_1 \in \mathrm{Span}\left(\{v_2, v_3, v_4\}\right)$.

□

- הוכחה 2 לטענה של סעיף ב' (מסתמך על הטענה של סעיף א')

א. נזכר שבצעדים א' עד ד' של הוכחה 5 לטענה של סעיף א' הראינו שעבור $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ מתקיים $\dim(\mathrm{Span}(S)) = 3$.

נניח שהוכחנו את הטענה של סעיף א' מבלי להסתמך על הטענה של סעיף ב'.
(ובפרט לא לפי ההמשך של הוכחה 5 שבו מסתמכים על הטענה שכרגע רוצים להוכיח.)

ב. מכיוון ש־ $T = \{v_2, v_3, v_4\}$ קבוצה בת"ל (לפי הטענה של סעיף א') במרחב $U = \mathrm{Span}(S)$ שמימדו 3, הקבוצה T חייבת להיות בסיס של U.

ג. אבל כל וקטור ב־ $\mathrm{Span}(S)$ ובפרט v_1 הוא צירוף לינארי של אברי הבסיס T.

□

המשך פתרון שאלה 3:

- הוכחה 3 לטענה של סעיף ב'

א. נסמן $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

ב. לפי הנתון השלישי, S ת"ל.

ג. משני הנתונים הראשונים אפשר להסיק ש־ $v_j \neq 0$ עבור $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

ד. לפי משפט, חייב להיות וקטור $v_k \in S$ שהוא צירוף לינארי של הבאים אחריו.

ה. אנחנו רוצים להראות שבהכרח $k = 1$.

ו. לפי הנתון השני, $k \notin \{3, 4\}$.

ז. לכן נשאר רק להוכיח ש־ $v_2 \notin \text{Span}\Big(\{v_3, v_4\}\Big)$.

ח. נניח בשלילה שקיימים סקלרים δ_3, δ_4 עבורם $v_2 = \delta_3 v_3 + \delta_4 v_4$.

ט. נציב במקום v_4 לפי (♣) ונקבל:

$$\begin{aligned} v_2 &= \delta_3 v_3 + \delta_4 v_4 \\ v_2 &= \delta_3 v_3 + \delta_4(\alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3) \\ v_2 &= (\delta_4 \alpha_1) v_1 + (\delta_3 + \delta_4 \alpha_3) v_3 \end{aligned}$$

כלומר v_2 הוא צירוף לינארי של v_1, v_3.

י. זו בסתירה לנתון הראשון, שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל.

יא. לכן בהכרח $v_2 \notin \text{Span}\Big(\{v_3, v_4\}\Big)$.

יב. לכן בהכרח $v_1 \in \text{Span}\Big(\{v_2, v_3, v_4\}\Big)$.

⋆ מכאן אפשר להוכיח את הטענה של סעיף א': ראינו שבקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ אין וקטור שהוא צ"ל של הבאים אחריו. לכן, לפי משפט, זו קבוצה בת"ל.

□

שאלה 4: (5%) יהי $w = -\sqrt{3} + i$ ויהי

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^{15} = w, \ \ \mathrm{Re}(z) < 0, \ \ \mathrm{Im}(z) < 0 \right\}.$$

נסמן ב־ |S| את מספר האברים בקבוצה S. אזי:

א. $|S| = 2$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{2/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ)$.

ב. $|S| = 2$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{2/15}\,\mathrm{cis}(338^\circ)$.

ג. $|S| = 3$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{3/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ)$.

ד. $|S| = 3$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{3/15}\,\mathrm{cis}(338^\circ)$.

ה. $|S| = 4$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{4/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ)$.

ו. $|S| = 4$ ומכפלת האברים ב־ S שווה ל־ $2^{4/15}\,\mathrm{cis}(338^\circ)$.

- הערה: סדר התשובות שונה בטורים שונים של המבחן.

פתרון שאלה 4:

- $w = -\sqrt{3} + i = 2\,\mathrm{cis}(150^\circ)$.
- לכן השורשים מסדר 15 הם המספרים $z_k = 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(10^\circ + k \cdot 24^\circ)$ עבור $k = 0, 1, \ldots, 14$.
- נבדוק עבור אילו ערכי k נקבל שהשורש z_k שייכת ל־ S, כלומר נמצאת ברביע השלישי.

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & < & 10^\circ + k \cdot 24^\circ \ < \ 270^\circ \\ 170^\circ & < & k \cdot 24^\circ \ < \ 260^\circ \end{array}$$

ולכן רק עבור $k \in \{8, 9, 10\}$ מתקיים $z_k \in S$. $\boxed{\text{לכן } |S| = 3.}$

- נחשב את המכפלה:

$$\begin{aligned} z_8 &= 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(10^\circ + 8 \cdot 24^\circ) = 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(202^\circ) \\ z_9 &= 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(10^\circ + 9 \cdot 24^\circ) = 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(226^\circ) \\ z_{10} &= 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(10^\circ + 10 \cdot 24^\circ) = 2^{1/15}\,\mathrm{cis}(250^\circ) \\ z_8 z_9 z_{10} &= 2^{3/15}\,\mathrm{cis}(202^\circ + 226^\circ + 250^\circ) = 2^{3/15}\,\mathrm{cis}(678^\circ) \\ &= 2^{3/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{לכן מכפלת אברי } S \text{ שווה } 2^{3/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ).}$

- התשובה הנכונה היא: $\boxed{|S| = 3 \text{ ומכפלת האברים ב־ } S \text{ שווה ל־ } 2^{3/15}\,\mathrm{cis}(318^\circ).}$

<u>שאלה 5:</u> (5%) תהיינה A, B מטריצות ממשיות ריבועיות מסדר $n \times n$, כאשר $n \geq 2$, **המקיימות** $A^2 = 0, \quad B^2 = 0$.

בדיוק שתי טענות מהטענות הבאות נכונות:

1. אם $AB = BA$ אז $(A+B)^2 = 0$.
2. אם $AB = BA$ אז $(A+B)^3 = 0$.
3. אם $(A+B)^2 = 0$ אז $AB = 0$.
4. אם $(A+B)(A-B) = 0$ אז $AB = BA$.

- <u>הערה:</u> סדר הטענות שונה בטורים שונים של המבחן.

<u>פתרון שאלה 5:</u>

- <u>דוגמה נגדית לטענה הראשונה:</u> אם $AB = BA$ אז $(A+B)^2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק שמתקיימים:

$$A^2 = 0, \quad B^2 = 0, \quad AB = BA, \quad (A+B)^2 \neq 0$$

בדוגמה זו חשוב ש־ $AB \neq 0$.

- <u>הוכחה לטענה השניה:</u> אם $AB = BA$ אז $(A+B)^3 = 0$.
(נשתמש בנתונים $A^2 = B^2 = 0$, $AB = BA$ בחישובים.)

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A \cdot (A+B) + B \cdot (A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 = 0 + 2AB + 0 = 2AB \\
(A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2 = (A+B) \cdot (2AB) \\
&= 2A^2B + 2BAB = 0 + 2AB^2 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

המשך פתרון שאלה 5:

- דוגמה נגדית לטענה השלישית: אם $(A+B)^2=0$ אז $AB=0$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק שמתקיימים:

$$A^2=0, \quad B^2=0, \quad (A+B)^2=0, \quad AB\neq 0$$

בדוגמה זו $AB=-BA$ שמאפשר $(A+B)^2=0$ כאשר $A^2=B^2=0,\ AB\neq 0$.

- הוכחה לטענה הרביעית: אם $(A+B)(A-B)=0$ אז $AB=BA$.
(נשתמש בנתונים $A^2=B^2=0$ בחישובים.)

$$\begin{aligned} 0 &= (A+B)(A-B)=A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B) \\ &= A^2-AB+BA-B^2=0-AB+BA-0 \\ &= BA-AB \\ AB &= BA \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{הטענות הנכונות הן השניה והרביעית.}}$

<u>שאלה 6:</u> (5%) יהי W מרחב הפתרונות של המערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ כאשר A מטריצה ממשית מסדר 4×4. נתון ש־

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}4\\6\\10\\a\end{pmatrix}\in W$$

כאשר a פרמטר ממשי.

אזי:

א. אם $\operatorname{rank}(A)=1$ אז $a\neq 12$.

ב. אם $\operatorname{rank}(A)=2$ אז $a=12$.

ג. אם $a=12$ אז $\dim W=2$.

ד. אם $\dim W=4$ אז $a\neq 12$.

ה. קיים a עבורו $\operatorname{rank}(A)=3$.

ו. לכל a מתקיים $\operatorname{rank}(A)\neq\dim W$.

- <u>הערה:</u> סדר התשובות שונה בטורים שונים של המבחן.

<u>פתרון שאלה 6:</u>

- נרשום את הוקטורים בשורות מטריצה ונדרג. לשם נוחיות נרשום אותם בסדר $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&2&3&4\\4&6&10&a\end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow\ \begin{array}{l}R_2\ \to\ R_2-R_1\\R_3\ \to\ R_3-4R_1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&2&4\\0&6&6&a\end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow\ R_3\ \to\ R_3-3R_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&2&4\\0&0&0&a-12\end{pmatrix}$$

המשך פתרון שאלה 6:

- אם $a \neq 12$ אז $\dim(W) \geq 3$ ולכן $\text{rank}(A) = 4 - \dim(W) \leq 1$.
- אם $a = 12$ אז $\dim(W) \geq 2$ ולכן $\text{rank}(A) = 4 - \dim(W) \leq 2$.
- תשובה ה' **אינה נכונה**, כי לכל a מתקיים $\text{rank}(A) \leq 2$.
- אם $\text{rank}(A) = 2$ בהכרח מתקיים $a = 12$.

נשים לב שהמטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מדרגה 2 ומתאימה עבור המקרה $a = 12$. $\boxed{\text{תשובה ב': "אם } \text{rank}(A) = 2 \text{ אז } a = 12 \text{" נכונה}}$.

במקרה זה $\text{rank}(A) = \dim W = 2$. לכן תשובה ו' **אינה נכונה**.

- תשובה א' וג' **אינן נכונות**. נניח ש־ $a = 12$

ייתכן שיש עוד פתרונות שלא נתונים. למשל למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים $\text{rank}(A) = 1$, והוקטורים הנתונים הם כולם פתרונות של המערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ (כאשר $a = 12$). עבור מטריצה זו $\dim W = 3$.

- תשובה ד' **אינה נכונה**. אם $\dim W = 4$ אז בהכרח $\text{rank}(A) = 4 - \dim W = 0$, והמטריצה $A = 0$. במקרה זה $\vec{w} \in W$ **לכל** ערך של a.

<u>שאלה 7:</u> (5%) יהי $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, מרחב המטריצות הממשיות הריבועיות מסדר 3×3.
V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות הרגילות. יהי $M \in V$ מטריצה נתונה מדרגה 3.
בדיוק שתי קבוצות מהקבוצות הבאות הן תת־מרחבים של V:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{A \in V \ : \ A^2 = 0\} \\ W_2 &= \{A \in V \ : \ AM^2 = M^2A\} \\ W_3 &= \{A \in V \ : \ \mathrm{tr}(AA^t) = 0\} \\ W_4 &= \{A \in V \ : \ a_{11}a_{22}a_{33} = 0\} \end{aligned}$$

- <u>הערה:</u> סדר וסימון הקבוצות שונה בטורים שונים של המבחן.

<u>פתרון שאלה 7:</u> $\boxed{W_2, W_3 \text{ הן תת־המרחבים.}}$

- W_1 אינו תת־מרחב. הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

אך $(A+B)^2 \neq 0$ ולכן $A + B \notin W_1$.

- W_2 הוא תת־מרחב. קל לבדוק ש־ $0 \in W_2$ וסגור תחת כפל בסקלר. (נחסוך מקום ולא נפרט את הבדיקה כאן.) בנוסף יש לבדוק ש־ W_2 סגור תחת חיבור, עובדה שנובעת מחוק הפילוג של כפל מטריצות. נניח ש־ $A, B \in W_2$:

$$(A+B)M^2 = AM^2 + BM^2 = M^2A + M^2B = M^2(A+B)$$

ולכן גם $A + B \in W_2$.

- W_3 הוא תת־מרחב כי $0 = \mathrm{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2\right)$ ומעל הממשיים שיוויון זה מחייב ש־ $a_{ij} = 0$ לכל i, j. כלומר, $A \in W_3$ אם ורק אם $A = 0$. הקבוצה $\{0\}$ היא תמיד תת־מרחב.

- W_4 אינו תת־מרחב. הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_4, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_4$$

אך $A + B = I_3$ ומכפלת אברי האלכסון של $A + B$ שונה מאפס. לכן $A + B \notin W_4$.

<u>שאלה 8:</u> (5%) יהי a פרמטר ממשי, ויהיו

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

עבור אילו ערכים של הפרמטר a תהיה הקבוצה $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$?

א. עבור כל ערך ממשי.

ב. עבור אף ערך ממשי.

ג. רק אם $a \neq 2$.

ד. רק אם $a = 5$.

ה. רק אם $a \in \{2, 5\}$.

ו. רק אם $a \notin \{2, 5\}$.

- <u>הערה:</u> סדר התשובות שונה בטורים שונים של המבחן.

<u>פתרון שאלה 8:</u>

- נרשום את הוקטורים בשורות מטריצה ונדרג. לשם נוחיות נרשום אותם בסדר $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 4 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

- עבור כל $a \notin \{2, 5\}$ דרגת A שווה למספר השורות ב־ A ($\text{rank}(A) = 3$). במקרים אלו הקבוצה $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ בת"ל. כל קבוצה בת"ל של $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ וקטורים ב־ $\mathbb{R}^3$ היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

- עבור $a \in \{2, 5\}$ מתקיים $\text{rank}(A) = 2$ (דרגת A קטנה ממספר השורות ב־ A) ולכן הקבוצה $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ת"ל. כמובן, קבוצה ת"ל לא יכולה להיות בסיס.

- התשובה הנכונה היא: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ בסיס ל־ $\mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{רק אם } a \notin \{2, 5\}}$.